

Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 311 Hall-Effekt und Elektrizitätsleitung bei Metallen

**Frank Hommes
und
Kilian Klug**

**Durchgeführt am:
13 Februar 2004**

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theoretische Hintergründe	3
2.1	Hall-Effekt	3
2.2	Mikroskopische Leitfähigkeitsparameter	3
3	Durchführung und Auswertung	6
3.1	Widerstandsmessung	6
3.2	Messung der Hallspannung	7
3.3	Berechnung der gesuchten Parameter	9
4	Anhang	11

1 Einleitung

Metalle weisen im Vergleich zu anderen Stoffen eine aussergewöhnlich hohe, elektrische Leitfähigkeit auf. Da diese Eigenschaft in vielen technischen Bereichen eine sehr wichtige Rolle spielt, sollen in diesem Versuch mit dem Titel "Hall-Effekt und Elektrizitätsleitung bei Metallen" einige dafür verantwortliche, mikroskopische Parameter von verschiedenen Metallproben bestimmt werden.

2 Theoretische Hintergründe

Um das eigentliche Ziel des Experimentes zu erreichen - nämlich die mikroskopischen Leitfähigkeitsparameter einiger Metalle zu berechnen - wird der sogenannte Hall-Effekt ausgenutzt werden. Dieser soll zunächst etwas näher erläutert werden, bevor auf die anderen Zusammenhänge, die ausserdem von Bedeutung sind, eingegangen wird.

2.1 Hall-Effekt

Der Hall-Effekt beschreibt das Auftreten der sogenannten Hall-Spannung U_H an einer Metallplatte. Sie tritt auf, wenn durch die Metallplatte ein Strom I_q geschickt wird, während ein äußeres Magnetfeld B senkrecht das Metall durchsetzt. Die Hall-Spannung kann dann quer zur Stromrichtung über Kontakte an den Schmalseiten der Metallplatte abgegriffen werden.

Sie entsteht, da es aufgrund der Lorentzkraft, die auf sich bewegende Ladungsträger wirkt, zu einer Ladungstrennung und damit zu einem Potentialgefälle zwischen den gegenüberliegenden Rändern des Metalles kommt.

Die Spannung bleibt jedoch recht klein, da ein elektrisches Feld von den durch die Lorentzkraft abgelenkten Ladungsträgern entsteht, welches der Lorentzkraft entgegenwirkt. Ab einem bestimmten Punkt wird ein stabiler Gleichgewichtszustand erreicht.

2.2 Mikroskopische Leitfähigkeitsparameter

Metallische Festkörper sind wie ein Kristallgitter aufgebaut. Die Atome neigen jedoch dazu, Elektronen aus ihrer äussersten Schale abzugeben. Diese, dann freien Elektronen, sorgen für die besonders gute Leitfähigkeit von Metallen, da sie sich fast unbeeinträchtigt bewegen können.

Allerdings bilden die freien Elektronen ein gemeinsames System, in dem, wie auch in den Schalen der einzelnen Atome, das Pauli-Prinzip gilt. Da dieses verbietet, dass mehrere Elektronen den gleichen Quantenzustand haben, fächern die

vorher genau definierten Energieniveaus auf und es entstehen Energiebänder. Die Elektronen des obersten, nicht vollständig besetzten Bandes, nennt man Leitungselektronen, da nur sie Energie aufnehmen und somit z.B. von einem äußeren Feld beschleunigt werden können.

Im Idealfall würde man eine unendlich hohe Leitfähigkeit bei Metallen erwarten. Dies ist in der Praxis nicht so, da die Elektronen mit Fremdatomen, Strukturdefekten und Metallionenrümpfen, die sich durch Wärmebewegung aus der Gleichgewichtslage entfernt haben, zusammenstoßen.

Diesen Zusammenstößen tragen zwei mikroskopische Parameter Rechnung - die mittlere freie Weglänge \bar{l} zwischen zwei Stößen und die dafür unter Einfluss eines äußeren Feldes E von den Elektronen benötigte mittlere Flugzeit $\bar{\tau}$.

Das äußere Feld bewirkt eine Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ in Feldrichtung von

$$\Delta\vec{v} = -\frac{e_0}{m_0}\vec{E}\bar{\tau}. \quad (1)$$

Alle Richtungen, in die die Elektronen nach jedem Stoß gestreut werden, sind gleichwahrscheinlich und damit die mittlere Geschwindigkeit in E-Feldrichtung nach jedem Zusammenstoß null. Man führt hier die mittlere Driftgeschwindigkeit in Feldrichtung

$$\vec{v}_d = \frac{1}{2}\Delta\vec{v} \quad (2)$$

ein.

Für einen homogenen Leiter (Länge L , Querschnitt Q) findet man damit für den Strom

$$I = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau} \frac{Q}{L} U. \quad (3)$$

Man erkennt, dass der Proportionalitätsfaktor in (3) gleich $\frac{1}{R}$ sein muss. Man bezeichnet ihn auch als elektrische Leitfähigkeit S . Sieht man von geometriebedingten Einschränkungen ab, so erhält man die spezifische Leitfähigkeit σ sowie den spezifischen Widerstand ρ :

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau} \quad \text{und} \quad \rho = 2 \frac{m_0}{e_0^2} \frac{1}{n \bar{\tau}} \quad (4)$$

n steht in dieser Gleichung für die Anzahl der Leitungselektronen pro Volumeneinheit. Dies ist neben $\bar{\tau}$ ein weiterer mikroskopischer Parameter, der von Interesse ist. Er lässt sich nach

$$U_H = -\frac{1}{ne_0} \frac{B \cdot I_q}{d} \quad (5)$$

berechnen, wenn die Hall-Spannung U_H , das Magnetfeld B , der Querstrom I_q sowie die Dicke d des Metalls bekannt sind. Diese Größen sind jedoch leicht messbar.

Die bereits oben erwähnte, mittlere freie Weglänge \bar{l} ergibt sich nach

$$\bar{l} = \bar{\tau} \cdot |v|. \quad (6)$$

$|v|$ ist hier allerdings nicht die Driftgeschwindigkeit v_d , sondern die Totalgeschwindigkeit der Elektronen und wird durch die Wärmebewegung der Kristallbausteine verursacht.

Wichtig ist, dass für die Elektronen das Pauli-Verbot gilt, sodass die Energieverteilung nicht durch die klassische Maxwell-Boltzmann-Statistik, sondern durch die Fermi-Dirac-Verteilung beschrieben wird. Daraus folgt

$$|v| \approx \sqrt{\frac{2E_F}{m_0}} \text{ mit } E_F = \frac{h^2}{2m_0} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{8\pi}n\right)^2}. \quad (7)$$

Ein weitere Leitfähigkeitsparameter - die sogenannte Beweglichkeit μ der Ladungsträger - ist als Proportionalitätsfaktor zwischen der Driftgeschwindigkeit v_d und der äußeren Feldstärke definiert:

$$\vec{v}_d = \mu \vec{E} \quad (8)$$

Es lässt sich auch ein Zusammenhang zwischen μ und $\bar{\tau}$ herstellen. Es gilt:

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{e_0}{m_0} \bar{\tau}. \quad (9)$$

3 Durchführung und Auswertung

Zunächst sollte eine Hysterese-Kurve des verwendeten Elektromagneten aufgenommen werden. Dazu wurde das Magnetfeld mit einer Hall-Sonde und einem digitalen Teslameter bei ansteigender, sowie bei abfallender Stromstärke gemessen. Der Strom wurde dabei von 0A bis 5A in Schritten von 0,5A variiert.

Die sich aus den Messwerten ergebende Kurve ist in Diagramm 3 im Anhang dargestellt (die einzelnen Messwerte sind als Kopie im Anhang). Leider entspricht die Kurve nicht exakt der theoretischen Form. Ursachen hierfür könnten einerseits eine zu geringe Genauigkeit der Messwerte für das Magnetfeld sowie andererseits die schlechte Einstellbarkeit der Stromstärke aufgrund der analogen Skala der Stromquelle sein. Zudem war die Hall-Sonde möglicherweise nicht exakt ausgerichtet und das Magnetfeld nicht sehr homogen.

Da der Elektromagnet aus zwei Spulen bestand, wurden diese in Reihe geschaltet um ein möglichst starkes Magnetfeld zu erhalten, da seine Stärke proportional zum Leiterstrom steigt und nichts mit der Spannung zu tun hat, die bei einer Parallelschaltung maximal an beiden Spulen wäre.

3.1 Widerstandsmessung

Um den für die Berechnungen wichtigen Widerstand R der zu untersuchenden Metallproben zu erhalten, wurde ein Aufbau verwendet, wie er schematisch in Abb. 1 dargestellt ist.

Zusätzlich zu den mit diesem Aufbau bestimmten Größen wurde der Durchmesser der jeweils verwendeten Drähte mit einer Mikrometerschraube gemessen. Die Länge der Drahtstücke war in den meisten Fällen angegeben, nur für Wismut wurde aufgrund der großen Brüchigkeit ein dickeres Stück verwendet, dessen Länge mit einer Schieblehre ermittelt wurde. Der Durchmesser der Wismut-Probe wurde zudem an mehreren Stellen vermessen - verwendet wird im Folgenden der Mittelwert.

Der Übersicht halber listen wir die Ergebnisse und wichtigen Parameter in Tabelle 1 auf, wobei der Widerstand nach dem Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ errechnet wurde. Der geometrieunabhängige, spezifische Widerstand ρ ergibt sich nach

$$\rho = 2 \frac{m_0}{e_0^2} \frac{1}{n \bar{\tau}}$$

Bei der Messung für Wismut traten z.T. erhebliche Probleme auf. So schwankten die von den Messgeräten angezeigten Werte sehr stark und fielen teilweise kontinuierlich. Der Versuch, die Messung mit anderen Stromstärken durchzuführen brachte keine wesentliche Verbesserung. Insgesamt sind die Werte deutlich zu

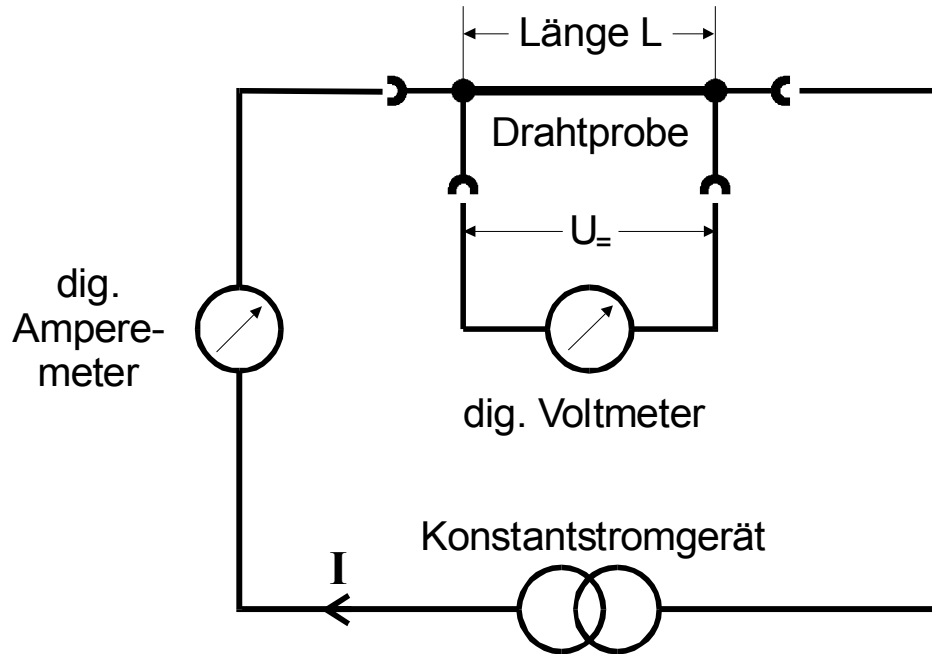


Abbildung 1: Versuchsaufbau zur Widerstandsmessung

klein. Ein grober Fehler im Versuchsaufbau jedoch kann zumindest ausgeschlossen werden, da er für die anderen Proben sinnvolle Daten lieferte.

3.2 Messung der Hallspannung

Für die Messung der Hall-Spannung U_H wurden bereits mit vergoldeten Kontakten versehene und in eine Halterung eingespannte dünne Folienstücke des jeweiligen Materials verwendet. Diese wurden in das Magnetfeld zwischen den beiden Polen eingebracht und mit einer Stromquelle, sowie einem digitalen Voltmeter verbunden. Der Elektromagnet wurde durchgehend mit dem Maximalstrom von 5A betrieben. Um jedoch die Problematik zu umgehen, dass zwischen den beiden Kontakten an der Metallprobe ein unvermeidliches Potentialgefälle herrscht, wurde das Magnetfeld umgepolt und die Messung wiederholt. Damit lässt sich die Störspannung herausrechnen, die ansonsten das Ergebnis sehr stark verfälschen

Material	Durchmesser [mm]	Länge [cm]	Strom [A]	Spannung [V]
Zink	0,266	170,5	0,200	0,396
Wismut	8,185	13,01	0,300	0,0266
Kupfer	0,117	173,0	0,200	0,704
Tantal	0,253	173,0	0,403	2,07
Wolfram	0,132	173,0	0,403	3,69
Silber	0,257	173,0	0,405	0,234

Material	Widerstand [Ω]	spez. Widerstand ρ [$\frac{\cdot mm^2}{m}$]		
Zink	1,98	0,06		
Wismut	0,09	36,39		
Kupfer	3,52	0,21		
Tantal	5,14	0,15		
Wolfram	9,16	0,07		
Silber	0,58	0,02		

Tabelle 1: Ergebnisse der Widerstandsmessung

würde. Die Hallspannung lässt sich nach

$$U_H = \frac{1}{2}(U_{ges+} - U_{ges-})$$

errechnen mit

$$U_{ges+} = U_H + U_{Str} \text{ und } U_{ges-} = -U_H + U_{Str}.$$

Abb. 2 zeigt schematisch den verwendeten Versuchsaufbau.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Ergebnisse für diesen Versuchsteil aufgeführt. Die Angaben für den Strom sind hierbei möglicherweise fehlerbehaftet, da die Stromquelle eine analoge Anzeige hatte, auf der sich die Stromstärke nicht sehr genau ablesen / einstellen ließ. Die Dicke der Folien wurde - wenn sie nicht angegeben war - mit einer Mikrometerschraube ermittelt. Die beiden Spalten mit der Spannung ergeben sich aus der Umpolung des Elektromagneten.

Mit der vorgegebenen Information, dass Kupfer ein Elektronenleiter ist, lässt sich nun anhand der Ergebnisse entscheiden, ob es sich bei den anderen untersuchten Metallen ebenfalls um Elektronenleiter handelt oder ob Löcherleitung vorliegt. Das negative Vorzeichen der beim Kupfer gemessenen Spannungen, lässt den Schluss zu, dass auch Zink, Tantal und Silber Elektronenleiter sind (da hier das gleiche Vorzeichen erscheint). Bei den beiden anderen Metallen, Wismut und Wolfram, ist aufgrund des anderen Vorzeichens davon auszugehen, dass die Löcherleitung überwiegt.

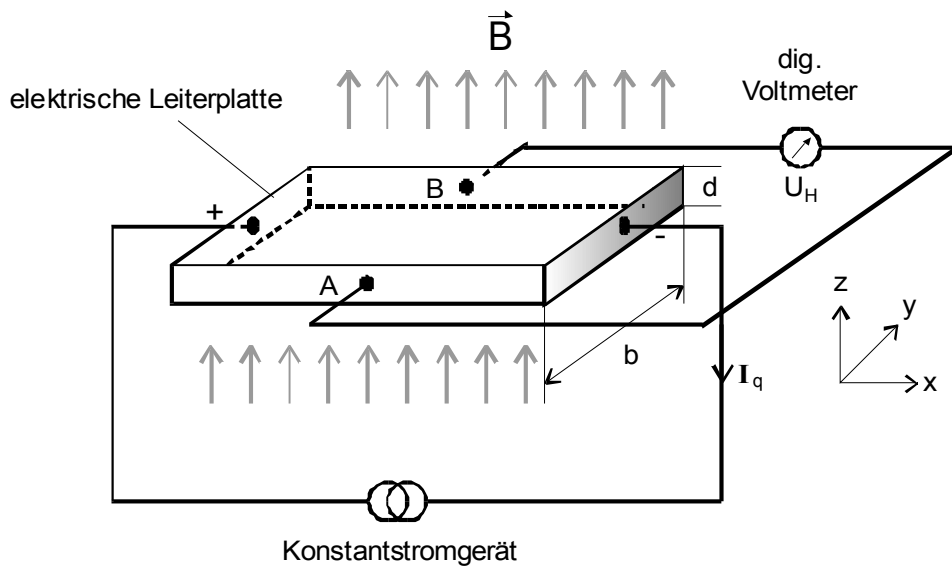


Abbildung 2: schematische Versuchsanordnung zur Messung der Hall-Spannung

3.3 Berechnung der gesuchten Parameter

Aus den so gewonnenen Daten können nun die gewünschten mikroskopischen Leitfähigkeitsparameter berechnet werden. Die gesamten Ergebnisse sind tabellarisch im Anhang aufgeführt. Beispielhaft soll an dieser Stelle für einen Wert jeder Parameter für Zink einmal angegeben werden.

$$n = -\frac{B \cdot I_q}{e_0 \cdot U_h \cdot d}$$

Material	Dicke [mm]	U_+ [mV]	U_- [mV]	I_q [A]	$ U_H $ [mV]
Zink	0,030	-0,018	-0,080	7	0,062
Wismut	0,005	3,90	36,87	1	32,97
Kupfer	0,034	-0,008	-0,046	9	0,038
Tantal	0,026	-2,097	-2,081	7	0,016
Wolfram	0,074	0,325	0,281	10	0,044
Silber	0,034	-0,021	0,099	10	0,078

Tabelle 2: Ergebnisse aus der Untersuchung des Hall-Effektes

$$n = -\frac{1.228 \cdot 7}{1.602 * 10^{-19} \cdot 6,20 \cdot 10^{-5} \cdot 3,00 \cdot 10^{-5}} \text{m}^{-3}$$

$$n = 3,01 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3}$$

$$\bar{\tau} = \frac{2m_0L}{e_0^2 RnQ}$$

$$\bar{\tau} = \frac{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,705}{(1,602 * 10^{-19})^2 \cdot 1,98 \cdot 3,01 \cdot 10^{28} \cdot 5,56 \cdot 10^{-8}} \text{s}$$

$$\bar{\tau} = 3,66 \cdot 10^{-14} \text{s} \approx 36 \text{fs}$$

$$\bar{v}_d = -\frac{I}{n \cdot Q \cdot e_0}$$

$$\bar{v}_d = \frac{7}{3,01 \cdot 10^{28} \cdot 5,56 \cdot 10^{-8} \cdot 1,602 * 10^{-19}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{v}_d = 2,61 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_f = \frac{h^2}{2m_0} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^2}$$

$$E_f = \frac{(6,6261 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3 \cdot 3,01 \cdot 10^{28}}{8 \cdot \pi}\right)^2}$$

$$E_f = 5,65 \cdot 10^{-19} \text{J}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\frac{2 \cdot E_f}{m_0}}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,65 \cdot 10^{-19} \text{m}}{9,109 \cdot 10^{-31} \text{s}}}$$

$$|\bar{v}| = 1,11 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{l} = \bar{\tau} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_f}{m_0}}$$

$$\bar{l} = 3,66 \cdot 10^{-14} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 5,65 \cdot 10^{-19}}{9,109 \cdot 10^{-31}}} \text{m}$$

$$\bar{l} = 4,07 \cdot 10^{-8} \text{m} \approx 41 \text{nm}$$

$$\mu = -\frac{e_0 \bar{\tau}}{2 \cdot m_0}$$

$$\mu = \frac{1,602 * 10^{-19} 3,66 \cdot 10^{-14} \text{C} \cdot \text{s}}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{kg}}$$

$$\mu = 3,22 \cdot 10^{-3} \frac{C \cdot s}{kg}$$

4 Anhang

Material:	Zink	Wismut	Kupfer
Ladungsträgerdichte $n [\frac{1}{m^3}]$	$3,01 \cdot 10^{28}$	$4,85 \cdot 10^{25}$	$5,57 \cdot 10^{28}$
Ladungsträger pro Atom z	2,2	586,63	1,54
mittlere Flugzeit τ [s]	$3,66 \cdot 10^{-14}$	$4,02 \cdot 10^{-14}$	$5,83 \cdot 10^{-14}$
mittlere Driftgeschwindigkeit $\bar{v} [\frac{m}{s}]$	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$2,45 \cdot 10^{-3}$	$0,39 \cdot 10^{-2}$
mittlere freie Weglänge \bar{l} [m]	$4,08 \cdot 10^{-8}$	$5,25 \cdot 10^{-9}$	$7,97 \cdot 10^{-8}$
Totalgeschwindigkeit $v [\frac{m}{s}]$	$1,11 \cdot 10^6$	$1,31 \cdot 10^5$	$1,37 \cdot 10^6$
Beweglichkeit $\mu [\frac{C \cdot s}{kg}]$	$3,22 \cdot 10^{-3}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$	$5,13 \cdot 10^{-3}$
Material:	Tantal	Wolfram	Silber
Ladungsträgerdichte n	$1,34 \cdot 10^{29}$	$2,45 \cdot 10^{28}$	$3,01 \cdot 10^{28}$
Ladungsträger pro Atom z	0,4	2,6	2,0
mittlere Flugzeit τ	$3,53 \cdot 10^{-15}$	$3,99 \cdot 10^{-14}$	$1,35 \cdot 10^{-13}$
mittlere Driftgeschwindigkeit $\bar{v} [\frac{m}{s}]$	$6,46 \cdot 10^{-3}$	$1,86 \cdot 10^{-1}$	$3,99 \cdot 10^{-2}$
mittlere freie Weglänge \bar{l} [m]	$6,49 \cdot 10^{-9}$	$4,16 \cdot 10^{-8}$	$1,51 \cdot 10^{-7}$
Totalgeschwindigkeit $v [\frac{m}{s}]$	$1,83 \cdot 10^6$	$1,04 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$
Beweglichkeit $\mu [\frac{C \cdot s}{kg}]$	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$3,51 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 3: berechnete Leitfähigkeitsparameter

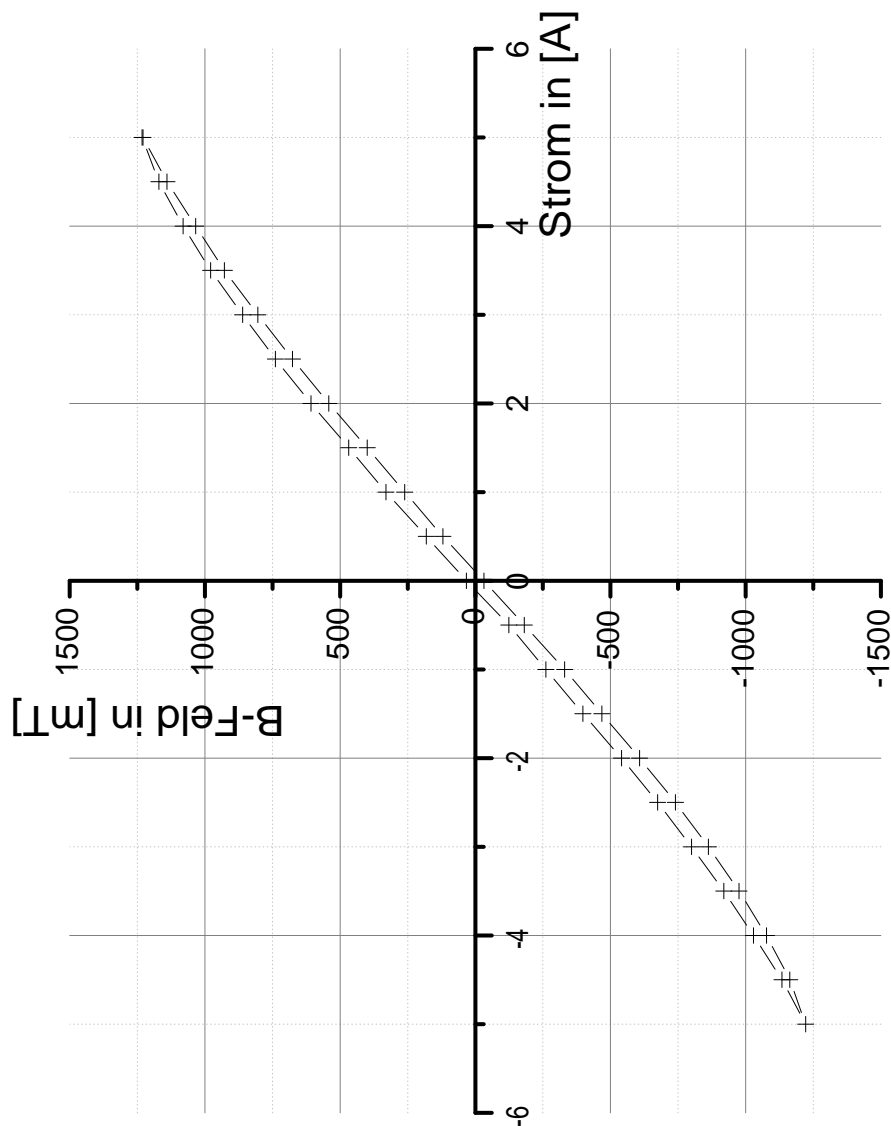


Abbildung 3: Hysterese-Kurve des verwendeten Elektromagneten