

# FEL – Freie-Elektronen-Laser

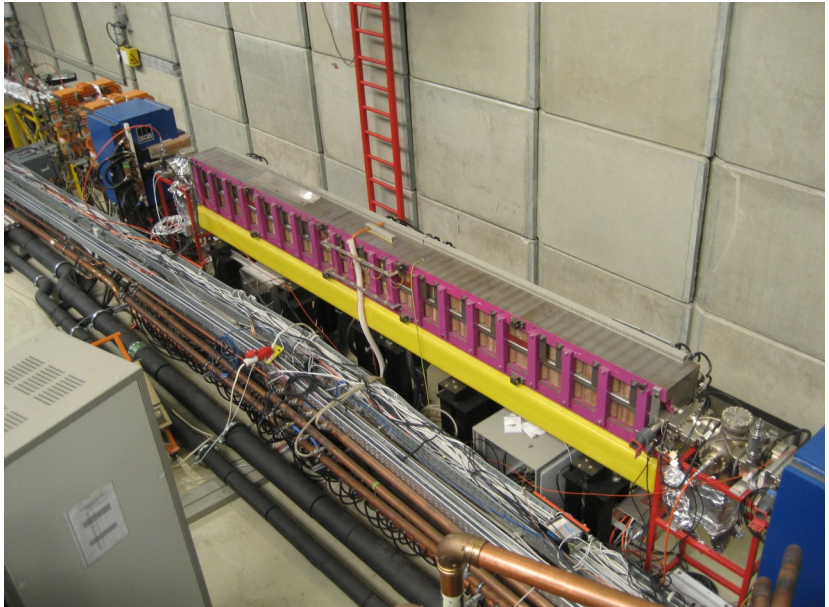
Frank Hommes  
frank.hommes@udo.edu

19 Dezember 2006

Im Seminar:  
"Beschleunigerphysik und Synchrotronstrahlung, mit Anwendungen in der  
Festkörperphysik"

- 1 Einführung
  - Eine kleine Einführung
- 2 Undulator/Wiggler
  - Feld auf der Achse
  - Horizontalgeschwindigkeit
- 3 FEL
  - Energieübertragung des FEL
  - Pendelgleichung
  - Verstärkung des FEL
- 4 verwendete Literatur
  - Literatur
  - Danksagung

# Unser Delta-FEL



# Eine kleine Einführung

## Was benötigt man für einen FEL?

- Speicherring der 3. Generation
- Undulator
- (Spiegel)

## Was bekommt man dafür?

- Einen Laser mit durchstimmbarer Wellenlänge
- Laser mit Wellenlängen im Röntgenbereich ( $\lambda \lesssim 1 \text{ nm}$ )

# Speicherring der 3. Generation

## Vor den Speicherringen

Vor der Einführung der Speicherringe wurden die Experimente direkt an den Synchrotrons durchgeführt.

- geringe Photonenausbeute (Strahlungsleistung  $\sim E^4$ )
- begrenzte Strahlfokussierung

## 1. Generation

Meistens Speicherringe aus der Hochenergiephysik mit Strahlquerschnitten, welche für Nutzer von Synchrotronstrahlung zu groß sind.

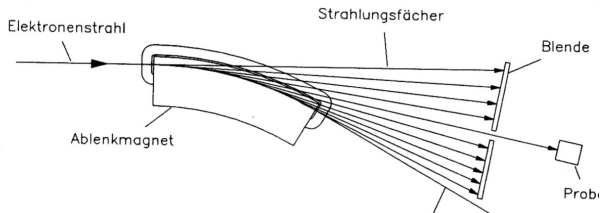
- zu großer Strahlquerschnitt  $\Rightarrow$  begrenzte Ortsauflösung

# Speicherring der 3. Generation

## 2. Generation

Speziell für Nutzer der Synchrotronstrahlung gebaut. Aber da nur die Synchrotronstrahlung an den Ablenkmagneten genutzt werden kann, ergibt sich mit zunehmender Entfernung eine geringere Intensität, welche auf die Probe trifft.

- An der Probe kommt relativ wenig Intensität an
- Kein Platz für Wiggler/Undulatoren (oder FEL)

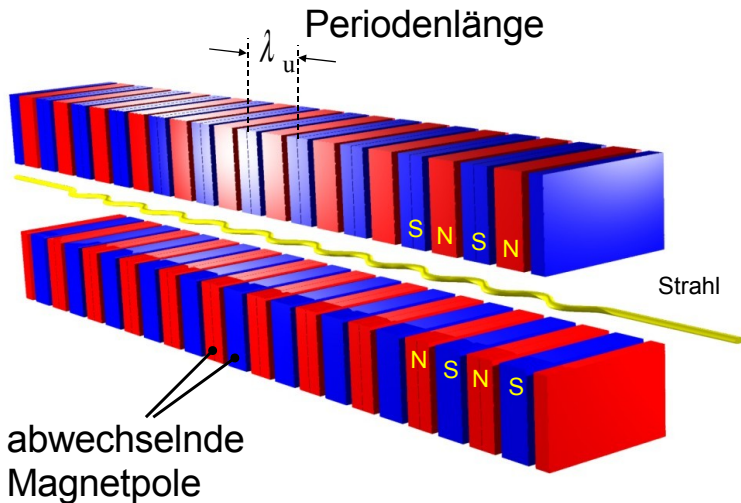


### 3. Generation

Wie Speicherringe der 2. Generation aber mit freiem Platz für Wiggler/Undulatoren.

Delta ist ein Speicherring der 3. Generation.  $\Rightarrow$  FEL möglich und bekanntlich schon eingebaut.

# Prinzip des Undulators



# Undulator/Wiggler

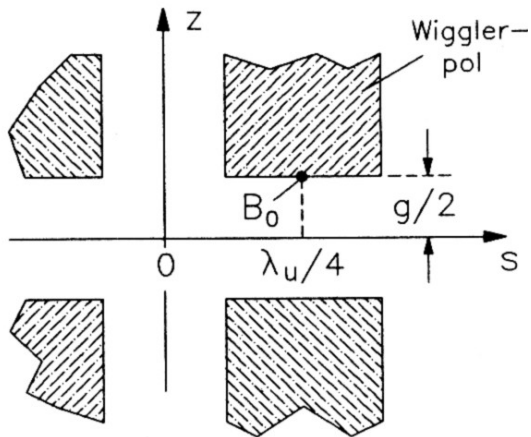
Mit  $k_U = \frac{2\pi}{\lambda_U}$  lautet das Potential entlang der Strahlachse:

$$\varphi(s, z) = A \sinh(k_U \cdot z) \cdot \cos(k_U \cdot s) \quad (1)$$

und damit ist die vertikale Feldkomponente:

$$B_z(s, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = A \cdot k_U \cdot \cosh(k_U z) \cos(k_U s) \quad (2)$$

Daraus bestimmen wir die Integrationskonstante  $A$ , indem wir davon ausgehen, dass in der Mitte der Polfläche die Flußdichte den Wert  $B_0$  hat.

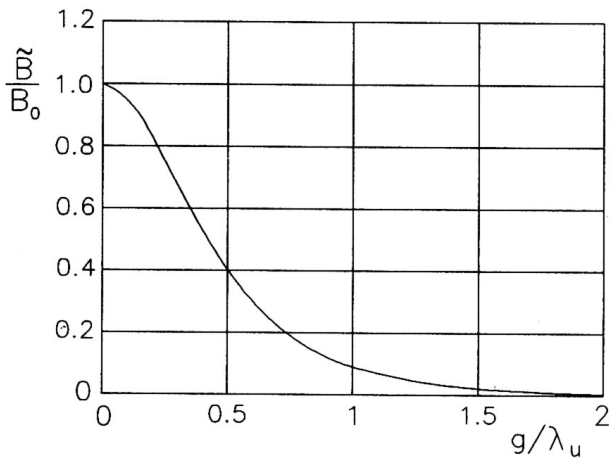


# Undulator/Wiggler

Daraus folgt:

$$B_z(s, z) = \frac{1}{k_u} \frac{B_0}{\underbrace{\cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right)}_{\tilde{B}}} k_u \cdot \cosh(k_u z) \cos(k_u s) \quad (3)$$

$B_z$  hängt im wesentlichen von  $\frac{g}{\lambda_u}$  ab.



# Undulator/Wiggler

Daraus folgt:

$$B_z(s, z) = \frac{1}{k_U} \frac{B_0}{\underbrace{\cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_U}\right)}_{\tilde{B}}} k_U \cdot \cosh(k_U z) \cos(k_U s) \quad (4)$$

$\tilde{B}$  hängt im wesentlichen von  $\frac{g}{\lambda_U}$  ab.

Da uns nur das Feld auf der Achse im weiteren interessiert, setzen wir ( $z = 0$ ) und erhalten kurz:

$$B_z(s) = \tilde{B} \cos(k_U s) \quad (5)$$

# Undulator/Wiggler

Damit der Strahl nicht verschoben wird und die Strahlemittanz nicht anwächst, muss noch folgende Bedingung erfüllt werden:

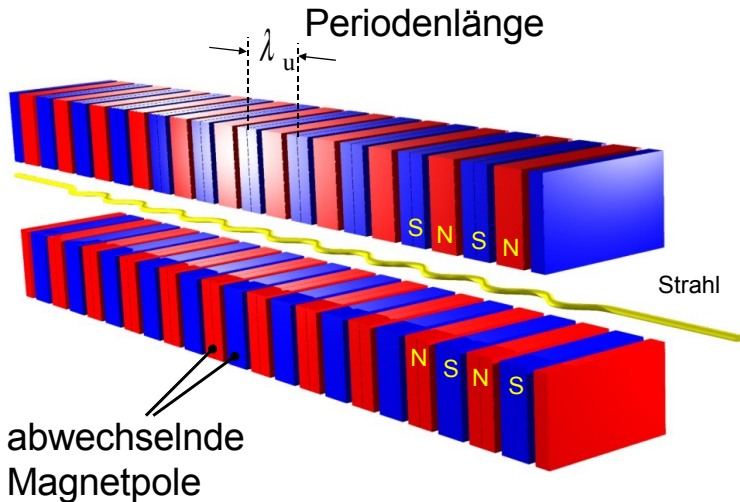
$$\int_{W/U} B_z(s) ds = \tilde{B} \int_{s_1}^{s_2} \cos(k_u s) ds = 0 \quad (6)$$

Dies ist erfüllt für

$$s_1 = 0 \text{ und } s_2 = n\lambda_u + \frac{\lambda_u}{2}$$

und die Umsetzung sind die beiden halben Magnete am Anfang und Ende des Wigglers/Undulators.

# Prinzip des Undulators



# Lorentzkraft

Die Ablenkung im Wiggler wird durch die Lorentzkraft beschrieben:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m_e \gamma \dot{\vec{v}} = e \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_z \\ B_s \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} -v_s B_z \\ -v_x B_s \\ v_x B_z \end{pmatrix} \quad (7)$$

Daraus folgt mit  $\dot{x} = v_x$  und  $\dot{s} = v_s$  das gekoppelte System:

$$\ddot{x} = -\dot{s} \frac{e}{m_e \gamma} B_z(s) \quad (8)$$

$$\ddot{s} = \dot{x} \frac{e}{m_e \gamma} B_z(s) \quad (9)$$

Da in guter Näherung  $\dot{x} \ll c$  und  $\dot{s} = \beta c$  gilt, benötigt man nur die erste Gleichung.

# Lorentzkraft

$$\ddot{x} = -\dot{s} \frac{e}{m_e \gamma} B_z(s)$$

Nach Ersetzen der zeitlichen Ableitung durch die räumliche ( $\ddot{x} = x'' c^2$ ) und Integration erhält man:

$$x' = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\frac{\lambda_u e \tilde{B}}{2\pi m_e c}}_{=K} \sin(k_u s) \quad (10)$$

Für einen Wiggler gilt  $K > 1$  und für einen Undulator  $K \leq 1$ .

# Horizontalgeschwindigkeit

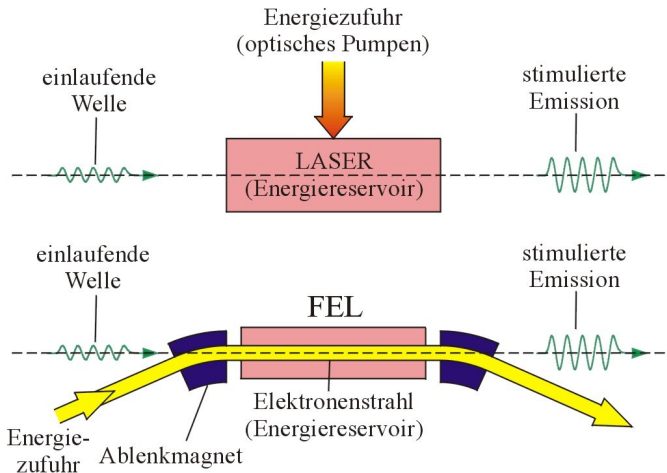
$$x'(s) = \frac{K}{\gamma} \sin(k_u s) \quad (11)$$

Setzt man wieder  $\dot{x}(t) = \beta c x'$  und  $s = \beta c t$  so erhält man:

$$\dot{x} = \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t) \quad (12)$$

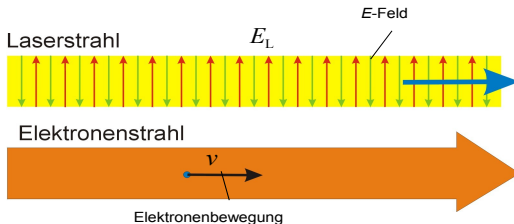
mit  $\omega_u = k_u \beta c$ .

# Prinzip eines Lasers und des FEL



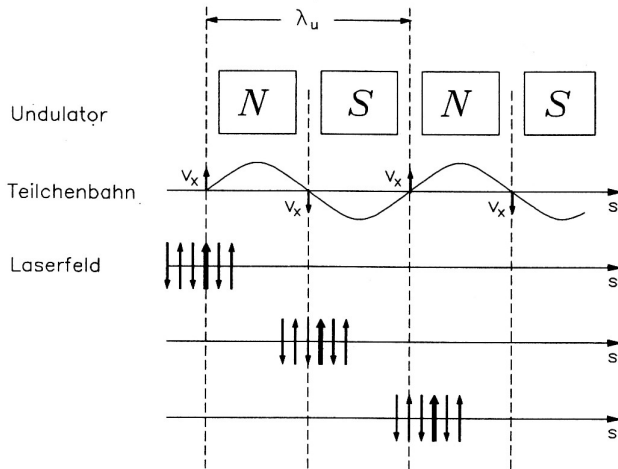
# Problem

Für eine maximale Wechselwirkungszone müssen der Strahl und der Lasers auf der gleichen Achse sein.



Nun steht jedoch das elektrische Feld  $\vec{E}_L$  senkrecht auf  $\vec{v}$  und der Energiegewinn ist:

$$\Delta W = -e \int \vec{E}_L d\vec{s} = -e \int \vec{v} \vec{E}_L dt = 0, \text{ da } \vec{v} \perp \vec{E}_L. \quad (13)$$



## Lösung: Undulator einsetzen

Beim Undulator gibt es eine horizontale Geschwindigkeitskomponente, welche wir vorhin hergeleitet haben.

$$v_x = \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t)$$

und die x-Komponente des Laserfeldes kann man als ebene Welle schreiben:

$$E_{L,x} = E_{L,x} \cos(k_L s - \omega_L t + \varphi_0) \quad (14)$$

Daraus folgt:

$$\Delta W = -\frac{ceE_{L,0}K}{2\gamma} \int (\sin(\Psi_+) - \sin(\Psi_-)) dt \quad (15)$$

$$\text{mit } \Psi_{\pm} = (k_L \pm k_u) \bar{s} - \omega_L t + \varphi_0 \quad (16)$$

## Lösung: Undulator einsetzen

Ein Übertrag ist nur möglich, wenn sich die Phasen im zeitlichen Mittel nicht ändern.

$$\frac{\Psi_{\pm}}{dt} \approx 0$$

Setzt man nun die mittlere relative Geschwindigkeit ein und beachtet, dass  $k_U \ll k_L$  dann findet man:

$$k_U = \pm \frac{k_L}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (17)$$

Die Negative Lösung hat im Mittel keine Auswirkung auf die Energiebilanz (schnelle Oszillation).

Wir erhalten dann als Kohärenzbedingung:

$$\lambda_L = \frac{\lambda_U}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right)$$

Fazit: Zur Energiegewinnung trägt nur die positive Phase bei.

# Stimulierte Emission

Mit  $\gamma = \frac{E}{m_e c^2}$  erhalten wir als relative Energieänderung pro Weg:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{dW}{cdt} \frac{1}{m_e c^2} \quad (18)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{eE_{L,0}K}{2\gamma m_e c^2} (\sin(\Psi_+) - \sin(\Psi_-)) \quad (19)$$

nach kurzer (...) Rechnung erhält man

$$\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)_N = -\frac{k_u K_L}{2\gamma} \underbrace{\left(J_{\frac{N-1}{2}}(N\eta) - J_{\frac{N+1}{2}}(N\eta)\right)}_{=\sqrt{F(N\eta)}} \cdot \sin(\Psi_+) \quad (20)$$

mit  $K_L = \frac{eE_{L,0}}{k_u m_e c^2}$ .

Der Energieaustausch findet also nur statt, wenn ein Laserfeld vorhanden ist.

# Resonanzenergie

Für die Phase pro Weg gilt:

$$\frac{d\Psi(s)}{ds} = 2 \frac{Nk_u}{\gamma_r} \Delta\gamma(s) \quad (21)$$

$$\text{wobei, } \gamma = \gamma_r + \Delta\gamma \quad (22)$$

Nun möchten wir noch die Energie auf die Resonanzenergie  $\gamma_r$  beziehen:

$$\frac{d\Delta\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} - \frac{d\gamma_r}{ds}$$

In einem homogenen Undulator ist die Resonanzenergie jedoch konstant und somit hatten wir  $d\gamma$  eigentlich schon.

$$\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)_N = \left(\frac{d\Delta\gamma(s)}{ds}\right)_N = -\frac{k_u K_L}{2\gamma} \sqrt{F(N\eta)} \cdot \sin(\Psi_+)$$

# Pendelgleichung

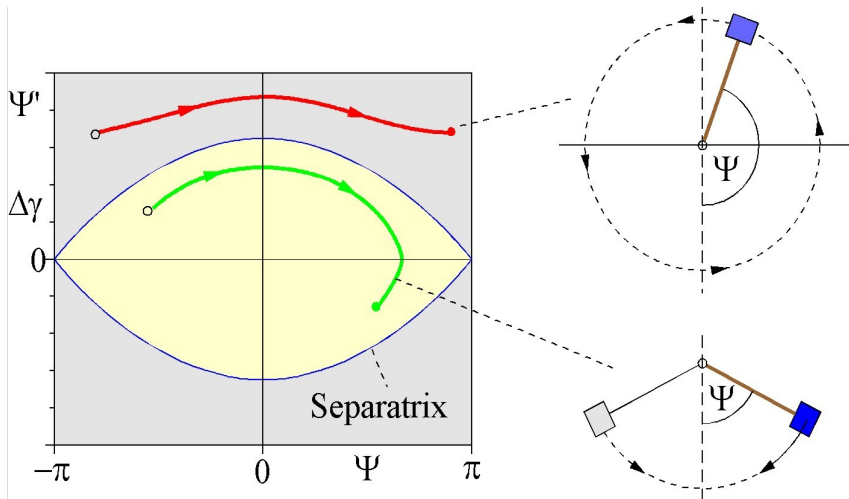
Leiten wir nun Gleichung 21 noch einmal nach  $s$  ab, so erhalten wir die allg. Pendelgleichung:

$$\Psi''(s) + \Omega_L^2 \sin(\Psi(s)) = 0 \quad (23)$$

mit der Frequenz:

$$\Omega_L^2 = \frac{Nk_u^2 K_L K}{\gamma_r^2} \sqrt{F(N\eta)}$$

# Veranschaulichung der Pendelgleichung



## FEL-Projekte an DELTA



Bei der analytischen Mittelung gibt es in 1. Ordnung keinen Energiegewinn. Man muß die Rechnung mindestens bis zur 2. Ordnung durchführen. Dann folgt

$$G_N = - \frac{\pi e^2 K^2 N_u^3 \lambda_u^2 n_b}{4 \epsilon_0 m_0 c^2 \gamma^3} F(\eta) \frac{d}{dw} \left( \frac{\sin w}{w} \right)^2$$

Hohe Verstärkung erhält man also vor allem mit

- hohe Elektronendichte  $n_b$
- große Undulatorlänge  $L = N_u \lambda_u$

Andererseits geht die Verstärkung stark mit der Elektronenenergie herunter

$$G \propto \frac{1}{\gamma^3} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{E_b}{m_0 c^2}$$

# Das erste Integral der Bewegungsgleichung

Die Verstärkung, welche ein Elektron im Laserfelds bewirkt, lautet:

$$G_1 = \frac{\Delta W_L}{W_L} = \frac{-m_e c^2 \Delta \gamma}{\frac{\epsilon_0}{2} E_{L,0}^2 V} = -\frac{2m_e c^2}{\epsilon_0 E_{L,0}^2 V} \cdot \Delta \gamma \quad (24)$$

Da  $\Delta \gamma \sim \Delta \Psi'$  gilt:

$$G_1 = -\frac{e^2 N k_u K^2}{\epsilon_0 V m_e c^2 \gamma_r^3} \cdot F(N\eta) \frac{\Delta \Psi'}{\Omega_L^4}$$

Nun müssen wir aber noch über alle Elektronenphasen mitteln:

$$\langle \Delta \Psi' \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta \Psi'_i$$

Mit der Elektronendichte  $n_b = \frac{n}{V}$  ergibt sich dann:

$$G_1 = -\frac{e^2 N k_u K^2}{\epsilon_0 m_e c^2 \gamma_r^3} \cdot n_b \cdot F(N\eta) \frac{\langle \Delta \Psi' \rangle}{\Omega_L^4}$$

# Das erste Integral der Bewegungsgleichung

Um  $\langle \Delta \Psi' \rangle$  bestimmen zu können, benötigen wir den Phasenverlauf  $\Psi(s)$ . Dieser wird durch die Pendelgleichung beschrieben und über die Lösung selbiger erhalten wir das erste Integral der Bewegungsgleichung:

$$\Psi'(s) = \frac{2\omega}{N_u \lambda_u} \sqrt{1 + \frac{N_u^2 \lambda_u^2 \Omega_L^2}{2\omega^2} (\cos(\Psi(s)) - \cos(\Psi_A))} \quad (25)$$

mit

$$\omega = \frac{2\pi N N_u}{\gamma_r} (\gamma_A - \gamma_r)$$

# Low-Gain Näherung

Ist das Laserfeld  $E_{L,o}$  schwach, so sind auch  $K_L$  und  $\Omega_L$  sehr klein. Durch die nur noch kleinen Veränderungen des Laserfeldes kann man dieses pro Durchlauf als konstant annehmen. Dies nennt man "Low-Gain Näherung". In dem Bereich können wir die Wurzel entwickeln, da der zweite Term klein gegen den ersten ist.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Und wir erhalten :

$$\begin{aligned} \Psi'(s) = \frac{2\omega}{N_u \lambda_u} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{N_u^2 \lambda_u^2 \Omega_L^2}{2\omega^2} (\cos(\Psi(s)) - \cos(\Psi_A)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} \frac{N_u^2 \lambda_u^2 \Omega_L^2}{2\omega^2} \right)^2 (\cos(\Psi(s)) - \cos(\Psi_A))^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (26)$$

# Low-Gain Näherung

In 1. Ordnung erhalten wir:

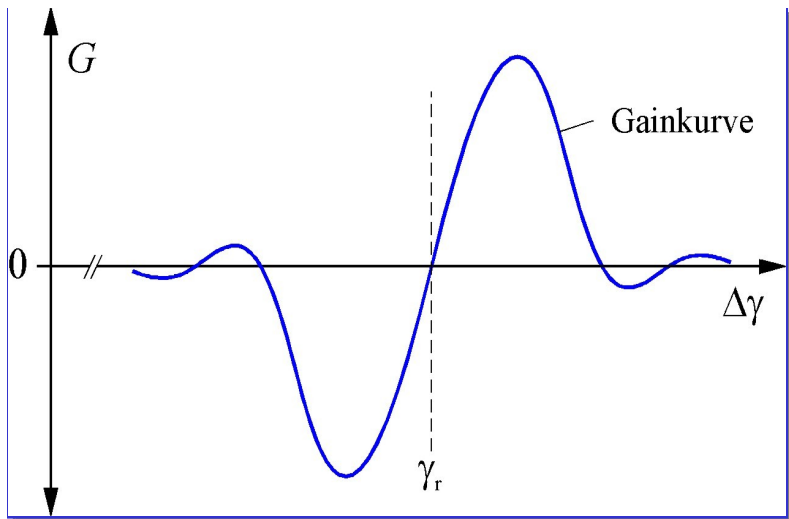
$$\Delta\Psi'_1 = \Psi'(s_o + L_u) - \Psi'(s_0) = \frac{N_u \lambda_u \Omega_L^2}{2\omega} (\cos(2\omega + \Psi_a) - \cos(\Psi_A)) \quad (27)$$

Da die Elektronen im Bunch gleichmäßig verteilt sind und selbiger sehr lang gegenüber der Laserwellenlänge ist, werden die Elektronen gleichmäßig alle Anfangszustände zwischen  $0 \leq \Psi_A \leq 2\pi$  ausfüllen und im Mittel erhalten wir:

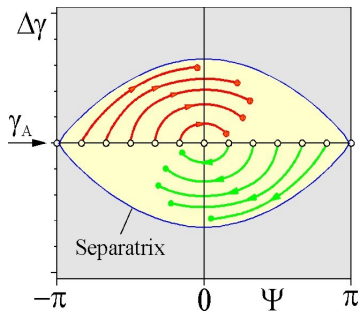
$$\langle \Delta\Psi'_1 \rangle = \frac{N_u \lambda_u \Omega_L^2}{2\omega} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(2\omega + \Psi_a) - \cos(\Psi_A)) d\Psi_A = 0 \quad (28)$$

Der Energieübertrag ist also Null in erster Ordnung! Die FEL-Verstärkung kann somit nur ein Effekt höherer Ordnung sein.

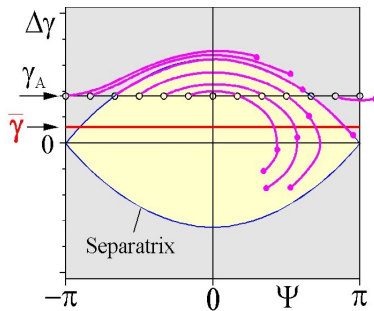
# Gainkurve



# Phasendiagramm



$$\gamma_A = \gamma_r$$



$$\gamma_A > \gamma_r$$

## Ergebnis

Die Verstärkung hängt im wesentlichen davon ab, mit welcher Einschubenergie die Elektronen in den FEL kommen. Bei  $\gamma = \gamma_r$  gibt es keine Verstärkung, daher sollten die Elektronen immer mit einer gering höheren Energie eingeschossen werden, um Maximale Verstärkung zu erreichen. Die Intensität kann nun mit Spiegeln weiter erhöht werden, wobei die Reflexivität von Spiegeln in Richtung Röntgenbereich stark abnimmt.

## Literatur

- K.Wille: Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen, 1992

# Danksagung

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Mein Dank geht an Katharina W., Florian N., Kilian K. und Prof. Wille, für die Hilfe beim Vorbereiten.